잠깐 든 생각

무엇인가를 잘 이해하고 있다는 사실은 좋은 일이다. 하지만 그 무엇인가를 알게 된 후 오랜 시간이 지나면 그것이 너무 당연하게 인식 되어서 자신이 그것을 어떻게 이해하게 되었는지에 대한 과정을 잊게 된다. 무슨 말인지 어떤 의미인지 이해하지 못하고 오랫동안 고민하다가 마침내 이해하게 되었을 때, 바로 그 순간에는 우리는 왜 이제까지 이해하지 못했었는지, 어떻게 이해하게 되었는지 그리고 왜 그러한지를 모두 알게 된다. 그러나 시간이 지난 후에는 왜 그러한지는 기억하게 되지만 왜 이해하지 못했었는지 그리고 어떻게 이해하게 되었는지는 잊게 된다. 하지만 많은 경우 왜 이해하지 못했었고 어떻게 이해하게 되었는지가 더 중요한 정보를 담고 있다.

가령 예를 들어서 어린 아이가 말을 배울 때 어떠한 과정으로 어떠한 원리로 말을 이해하게 되었는지를 아는 것은 엄청난 중요성이 있지만 아무도 자신의 어릴 적을 기억하지 못한다. 어떠한 방식으로 걷는 법을 배우게 되었는지, 어떻게 머리로 명령을 내려서 몸의 근육을 움직여서 걷게 되었는지, 그 과정에서 두뇌에 어떠한 routine이 생겨서 이제는 아무런 생각 없이 자동으로 걷고 말하고 보고하는지 그 과정을 이해한다면 로봇을 개발하고 병을 치료하고 하는데 무척이나 유용하게 쓰일 수 있을 것이다.

따라서 내가 이 순간 무엇인가를 모른다고 해서 슬퍼할 이유가 없다. 이미 알고 있는 사람들에 비해서, 나에게는 그 과정을 경험하고 이해하고 즐길 수 있는 기쁨이 기다리고 있기 때문이다.

용어의 선택

폭 넓게 사용되는 영어 용어를 굳이 한국어 용어로 새로 개발해서 사용하고자 하는 것은 어떠한 의미를 갖는가. 가령 축구에서 코너킥 대신에 모서리 차기라고 하고 골키퍼 대신에 문지기라고 하는 것이 과연 국어를 사랑하는 일인가. 물론 처음 코너킥을 모서리 차기라고 하면 우스꽝스럽게 느껴지다가 어느 정도 듣다보면 자연스럽게 느껴짐을 안다. 그러다 더 시간이 지나면 오히려 코너킥이라는 용어 보다는 모서리 차기라는 용어가 더 이해하기 쉽고 좋은 용어라고 생각 되어지게 된다. 그러면 과연 이런 과정을 통하여 한국어는 더 발전하게 된 것이고 사랑 받은 것인가? 그렇다고도 그렇지 않다고도 하지는 않겠다. 확신이 안 선다.

그러나 분명한 것은 수학 등의 학문 영역은 점점 세계화 되어가고 있고 그 용어를 자국어로 새롭게 만들어서 사용하다보면 엄청난 불편을 느끼게 된다. 따라서 학문 영역에서 많이 쓰이는 영어 용어들은 그대로 사용하는 것이 이해를 돕는데도 빠르고, 쉽게 한국어 교재와 영어 교재를 넘나들게 만들어 준다. 한 걸음 더 나가서 코너킥 대신에 conner kick을 사용하는 것이 영어 용어에 익숙한 사람들에게는 한결 편할 것이고 앞으로 영어 교재를 읽게 될 사람들에게도 더욱 도움이 될 것이다. 대응되어지는 한국어 용어가 폭 넓게 사용되고 있다면 같이 병기하는 것도 좋은 방법이 될 것이다.

Modeling of Option Pricing.

1.1 Option이란 무엇인가.

금융거래, 선물거래 등 시장에서 발생하는 다양한 거래에서 사람들은 option이라는 것을 만들어서 거래한다. option이란 것이 무엇인지 설명하기 위해서 일단은 가장 기본이 되는 주식 시장에서의 European put option을 예로 들어 설명해 보자. 우선 누군가가 option을 만들어서 팔아야 한다. option을 만드는 사람을 writer라고 한다. 아무나 writer가 될 수는 없다. 믿을 수 없는 사람에게서는 그가 만든 option을 사려고 하지 않는다. 뿐만 아니라 상거래가 혼란해 질 수 있어서 허가된 사람, 주로 증권회사 등이 option을 만들어서 팔게 된다.

European put option은 몇 가지의 요소로 이루어진다. 일단 대상 asset이 필요하다. asset은 특정 회사의 주식 또는 여러 회사의 주식 등을 모은 portfolio 등이 될 수 있다. 여기서는 단순히 주식이라고 하겠다. 그리고 편의상 거래량을 1이라고 해도 무리가 없다. 많은 양을 거래하기 위해서는 단위가 1인 option을 많이 샀다고 하거나 아예 많은 양을 다루는 option을 하나 샀다고 하는 것과 차이가 없기 때문이다. 따라서 양은 관심 요소가 아니다. 대신에 분할이 가능하다고 생각해서 가령 0.4 만큼 구매할 수도 있다고 하자. 두 번째 요소는 가격이다. 가격을 보통 exercise price, striking price 실현가격 이라하고 앞으로 E라고 표기 한다. 세 번째 요소는 expiration date 또는 만료기간으로 앞으로는 T로 표기 하겠다.

그렇다면 내가 Excercise price가 E 이고 만료기간이 T 인 European put option을 샀다는 말은 T 시간이 경과한 특정한 날짜에 내가 갖고 있는 asset을 writer의 책상에 올려놓고 (이러한 이유로 put이라는 용어를 쓴다.) 약속된 가격 E에 사라고 요구할 수 있다는 의미이다. 물론 writer는 E 가격에 그 asset을 사야 한다. 다시 말해 European put option은 주식을 정해진 날에 특정 가격으로 팔 수 있는 권리를 말한다.

그렇다면 이와 같은 option을 갖고 있을 경우에 일어나는 일들을 생각해 보자. 만약 그 option을 행사하는 날짜에 주식 시장에서 거래되는 그 asset의 가격이 E 보다 높으면 나는 writer에게 주식을 팔지 않고 주식 시장에 가서 asset을 파는 것이 더 이익이 될 것이다. option은 권리이기 때문에 행사해도 되고 행사하지 않아도 된다. 따라서 결과적으로는 그 option을 산 것을 후회할 것이다. 그러나 만약 주식시장에서의 asset의 값이 E 보다 낮으면 나는 writer에게 가서 그 주식을 사라고 할 것이다. 그러면 writer는 주식 시장에서의 가격보다 더 비싼 가격에 그 asset을 사야만 한다. 즉 그 option을 행사하는 것이 유리해 지는 것이다.

그렇다면 그 option을 행사하기 위해서 반드시 내가 그 asset을 갖고 있어야 하는 것인가? 그렇지는 않다. 비록 내가 팔아야 할 asset을 갖고 있지 않더라도, 주식시장의 가격이 exercise price E 보다 싸다면 당장에 주식 시장에 가서 주식을 사다가 writer에게 가격 E에 팔면 된다. 사실 writer 입장에서도 주식을 가격 E에 매입한 후에 그 주식을 주식시장에 가서 되팔기 보다는 차라리 그 차액만을 지불해 주는 것이 더 손쉬운 일이다. 따라서 이러한 거래에서는 실제로 주식이 거래 되지는 않고 그 차액만 거래가 된다.

그렇다면 실제적으로 이러한 거래에서 일어난 일은 무엇인가. 주식은 전혀 거래가 되지 않았고 그 주식의 값에 따라 가치가 결정되는 새로운 상품이 만들어 져서 거래가 된 것이다.

그래서 이러한 상품을 주식 등의 다른 금융 상품의 가치에 의해서 파생된 상품이라고 하여 금융 파생 상품, financial derivative, 라고 부른다. 이러한 거래는 얼핏 보면 도박과 같다. 만약에 주식의 가격이 내리면 내가 내기에서 이겨서 그 차액을 지급 받는 것이고, 주식의 가격이 올라가면 option을 살 때 투자된 금액을 모두 날리고 마는 것이다. 복권 또는 로또 등을 구입한 것과 별 차이가 없는 것이다. 그러나 만약 주식 가격이 떨어지면 난처해지는 기업이나 개인이 미리 이러한 option을 사서 갖고 있으면 보험의 역할을 할 수 있기 때문에 이용하는 방법에 따라서 로또, 복권 등과는 분명한 차이가 있다. 그리고 이와 같이 위험을 감소시키기 위하여 파생 상품 등을 거래하는 것을 hedging이라고 한다.

1.2 Arbitrage란 무엇인가.

어떤 투자가 아무런 위험 risk 없이 은행의 이자보다 더 큰 수익을 낼 수 있다면 그 차액을 arbitrage라고 한다. 내가 아무런 risk도 지지 않았는데도 은행 이자보다 큰 수익을 고정적으로 얻을 수 있다면 그 차이가 아무리 작다고 해도 커다란 파급효과를 갖는다. 가령 은행에서 천문학적인 돈을 빌려다가 투자를 해서 risk가 없는 그러나 은행 이자보다 조금 더 큰 수익을 얻는다면 이자를 지급하고 난후에도 난 엄청난 이익을 남기게 되기 때문이다. 주식시장 등에서는 이러한 상태가 순간적으로 생긴다고 해도 이내 가격이 변동 되어서 이러한 비정상적인 상태를 즉시 흡수하게 된다. 이와 같이 시장의 가격은 이와 같은 평형을 이룬 상태로 이해 되어야한다. 따라서 우리는 항상 arbitrage는 없다고 가정한다.

만약 지난 한 달간 어떤 주식의 가격이 올랐다면 앞으로도 그 주식의 가격이 오를 것을 예상하고 주식의 가격을 예측해야 할까? 다시 말해 지난 주식 가격의 변동을 고려해서 그 변동 경향을 주식 등과 관련된 option의 가격을 결정 하는데 반영해야 할까 하는 것이다. 위에서 설명한 것과 같은 이유로 그렇지 않다가 정답이다. 이미 현재의 가격에는 이제까지의 가격 변동 경향을 포함해서 모든 가능한 정보들이 반영 되었다고 보는 것이 옳다. 가령 어느 기업의 경영 수지가 좋을 것이라는 예상이 있다면 그 예상은 이미 현재의 주식 가격에 다 포함이 되어 있다는 의미이다. 가격의 변동은 오히려 그 예상이 틀렸을 경우에 일어나게 된다. 가령 일주일간 주식이 계속 오르는 것을 보고서 앞으로도 계속 오를 것이라고 믿고 내가 오늘 그 주식을 오늘 사면 그 주식의 가격이 과연 오를까? 아마도 많은 사람이 경험한 것은 그 주식을 사는 즉시 가격이 하락 한다는 것이다. 따라서 우리는 그러한 예측은 없다고 가정하고 모델을 세워야 한다.

1.3 put option 가격은 어떻게 정해지는가.

그렇다면 European put option을 살 때 얼마의 가격을 지불하면 적당할까? 우리가 하고자 하는 모델링이 바로 이러한 가격을 결정하고자 하는 작업이다. 여기선 일단 option 가격을 결정하는 인자들을 살펴보고 그들이 어떻게 가격의 결정에 영향을 미치는지 그 원리를 간략하게 고려해 보자.

일단 option 가격을 P라고 하자. 이러한 option의 가격은 현재의 주식 가격이 얼마인지에 따라 다르게 나타나게 되기 때문에 우리는 option의 가격을 현재의 주식 가격에 대한 함수로 나타내고자 한다. 여기서 주식의 현재 가격을 S 라고 하자. 우리가 결정 하고자 하는 put option의 가격은 option을 이루고 있는 E,T 그리고 현재의 주식가격 S에 따라 결정 되

어지는 함수, 즉 P=P(E,S,T), 이고 우리는 이 함수를 찾고자 한다. 많은 경우 E와 T가 정해진 option의 가격을 결정 하고자 하니까 이 경우에는 S만의 함수가 된다.

얼핏 생각해도 T 시간 이후의 주식 가격이 어떻게 변동 될지 모르는 상황에서 지금의 주식 가격에 따른 option의 가격을 결정하는 것은 쉽지 않게 느껴진다. 그렇다면 가장 간단한 경우부터 생각해 보아야 하는데 그 경우가 T=0, 즉 지금 당장 option을 행사하는 경우이다. (또는 완료 시점인 $t=T$에서의 가치라고 말해도 좋다.) 만약 주식 가격 S가 exercise price E보다 높으면, 즉 E-S<0이면, 그 option은 전혀 가치가 없으므로 option의 가격은 0이다. 만약 E-S>0 이면 그 차액만큼의 가치가 있으므로 option의 가격은 E-S가 된다. 다시 말해

$$P(E,S,T=0)=\max(E-S,0) \tag{1}$$

로 주어진다. 정해진 exercise price E에 대한 option price P의 그래프를 그리면 Figure 1.1과 같다. 이와 같이 지금 당장 행사할 수 있는, $T=0$인, option의 가치 다시 말해 만기일에 도달했을 때 즉 $t=T$에서의 option의 가치 함수를 payoff function이라고 한다.

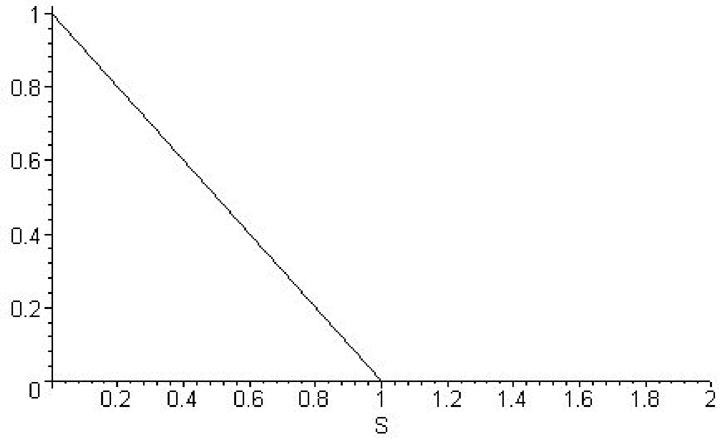


Figure 1.1. T=0, E=1일대의 put option의 가격

이젠 T>0라고 하자. 이 경우 option의 가격을 정하기 위해서는 무엇을 고려해야 하는가. 3가지를 고려해야 하는데 주식 가격의 변동성 volatility σ, 자산의 가치 상승률 μ 그리고 이자율 r 이다. 우선 자산의 가치는 이자율과 비슷하게 증가하는 경향이 있다. 만약 자산의 가치가 증가 하지 않는다면 자산에 투자하는 것보다 은행에 예금을 해서 이자를 받는 것이 훨씬 현명한 일이다. 그러나 이자율 보다 훨씬 빠르게 자산의 가치가 상승한다면 돈을 은행에서 빌려서 자산을 사두면 이자를 갚고도 많은 이익을 남기게 된다. 따라서 자산의 가치 상승률과 이자율은 비슷하게 된다. 차이가 있다면 이자율은 분명하게 주어지지만 자산의 가치 상승률은 변동이 있고 손에 확실하게 놓여 있는 것이 아니라는 것이다. 만약 변동률이 없다면, 즉 $\sigma=0$ 이라면, 자산의 가치 상승률과 이자율은 일치해야 한다. 차이가 조금이라도 있다면 돈은 수익이 높은 곳으로 몰릴 것이고 마침내는 같아지는 곳에서 머무르게 된다. 반대로 변동률이 있다면 자산의 가치 상승에는 불확실성이 생기고 이것이 비용처럼 작용하여 자산의 가치 상승률은 이자율보다 높게 형성된다. 많은 경우 변동률 σ는 시장에 참여하는 주체들 및 해당 기업의 사업 종목 및 안정성 등에 의해 결정 되는 고유한 값으로 이해되

고 가치 상승률 μ는 변동률 σ 및 이자율 r과 다음의 식으로 연동 되어 결정되는 값으로 이해되어 진다.

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \text{constant}.$$

이 식에서 우변의 constant는 시장에 의해 주어지는 고유 값으로 조금 더 자세한 의미는 다음 장에서 다룬다.

현재의 주식 가격이 S 이면 만약 변동성이 없는 상태에서는 T 시간 후의 주식 가격은 $S'(t) = \mu S(t)$를 만족하게 되고 다음으로 주어진다.

$$S(t) = e^{\mu T} S(0).$$

따라서 이자율과 변동성을 고려하지 않은 option price는 다음과 같다.

$$P(E, S, T : \sigma = 0, r = 0) = \max(E - e^{\mu T} S, 0). \qquad (2)$$

Figure 1.2에는 위의 option price가 T=0인 경우와 함께 그려졌다.

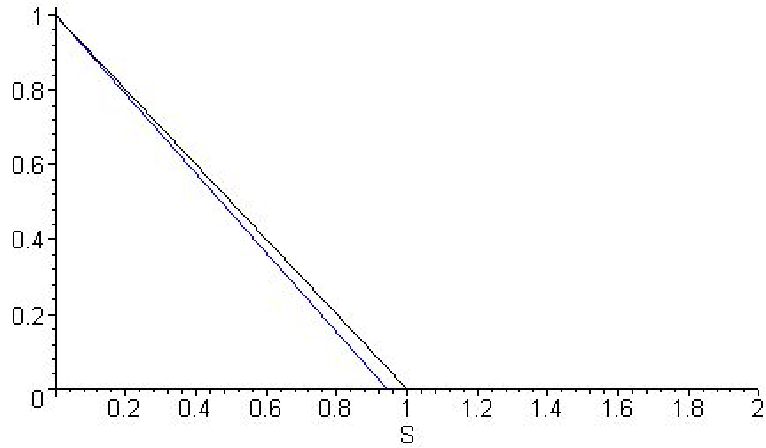


Figure 1.2. E=1,T=1, $\mu = 0.06$, $\sigma = r = 0$인 경우의 put option의 가치

다음은 이자율이다. option을 사는 것은 지금이지만 돈을 받는 것은 T 시간이 흐른 후이기 때문에 우리는 이자를 고려해야 한다. T 시간 후에 M의 돈을 받기로 했다면 지금 시간에서의 가치는 쉽게 계산 할 수 있다. t 시간 이후의 가치를 $M(t)$라고 하자. 그러면 그 변화율은 $M'(t) = rM(t)$을 만족하고 따라서 현재의 가치는 다음으로 주어진다.

$$M(0) = Me^{-rT}$$

한편 (2)에서 주어진 가치는 T 시간 이후의 가치이므로 위의 식을 이용해서 현재의 가치로

바꾸면 변동성이 없는 상태에서의 put option의 가치를 얻을 수 있는데 다음과 같다.

$$P(E,S,T:\sigma=0)=e^{-rT}\max(E-e^{\mu T}S,0). \qquad (3)$$

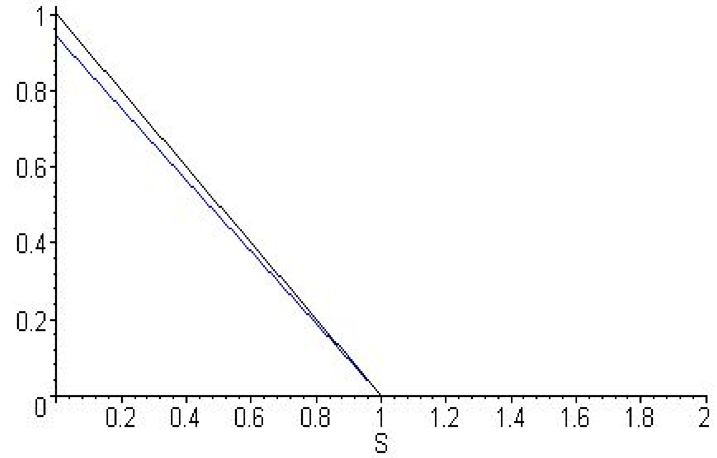


Figure 1.3. E=1,T=1, $r=0.06$, $\sigma=\mu=0$인 경우의 put option의 가치

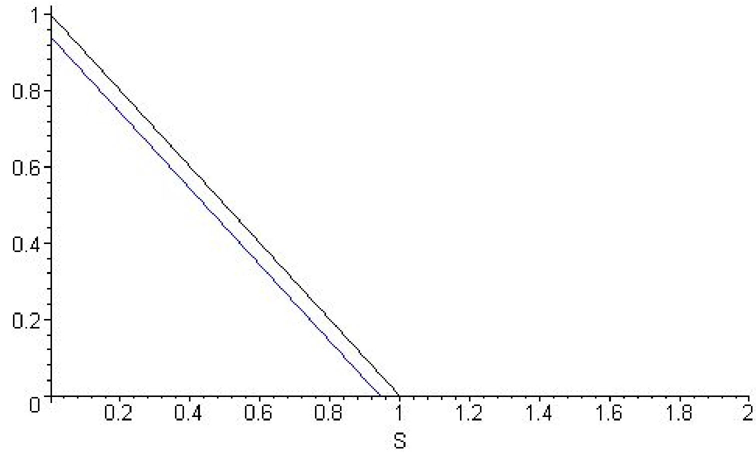


Figure 1.4. E=1,T=1, $\mu=r=0.06$, $\sigma=0$인 경우의 put option의 가치

Figure 1.3과 1.4 에는 위의 option price가 T=0인 경우와 함께 그려졌다.

변동성이 없는 경우의 put option의 가격은 (3)의 식으로 explicit 하게 주어진다. 남은 것은 변동성을 고려하는 작업인데 사실 option pricing modeling의 핵심 요소라고 할 수 있다. 변동성이 option pricing에 작용하는 기본 원리를 보기 위하여 자산의 가치 상승률 μ 와 이자율 r 모두를 0이라고 하자. 이 경우 (3)의 식은 (1)의 식과 같게 된다. 따라서 변동률 volatility가 0이면 option의 가격은 T=0인 경우와 같게 된다. 가령 S>E 이면 option의 가격은 0이 된다. 그러나 변동률이 0이 아니라면 S>E이라도, T 시간 이후에는 주식 가격이 E 밑으로 내려올 수 있으므로 그 가치가 0은 아니라고 할 수 있다. 따라서 누군가가 무료로 option을

주겠다고 하면 받아 두었다가 주식 값이 E 아래로 떨어지길 기다리게 될 것이다. 즉 변동성이 없을 경우에 비해서 그 가치가 올라감을 볼 수 있다. 물론 S-E가 클 경우에는 그 가

능성이 낮아져서 그 가치가 S-E가 0에 가까울 때에 비해서 작을 것이다.

비슷하게 S<E인 경우를 고려해 보자. 현재의 주식 가격인 S는 T 시간이 지난 후에는 변동이 있을 것인데 T 시점에서의 가격을 S_T라고 하자. 지금은 이자, 가치 상승률을 모두 0으로 두었기 때문에 그 가격의 변동이 현재의 가격을 중심으로 변동할 것인데, 가령 정규 분포에 가깝게 변동한다고 해 보자. 이 경우 변동의 정도를 나타내는 척도로 분포의 표준편차를 사용하면 적절할 것이다. 한편 S_T>E 가 되는 경우는 option을 행사 하지 않을 것이기 때문에 기댓값을 계산할 때 고려할 필요가 없게 되므로 따라서 S_T<E인 경우만 고려한다면 그 기댓값이 현재의 주식 가격인 S보다 낮아지게 된다. 다시 말하면 S_T는 정규 분포와 비슷한 확률 분포를 따른다고 가정했기 때문에 기댓값은 S이지만, option이 행사되는 region인 S_T<E인 경우만 고려했을 경우의 기댓값 $\overline{S}$는 S보다 작게 되고 다라서 option의 가치는 $E-\overline{S}$가 되며 payoff function의 가치인 $E-S$보다 크게 된다.

위의 설명은 직관을 주기 위한 설명이었다. 이제 보다 수학적으로 표현해 보자. 우선 이자, 가치 상승률을 모두 0으로 둔 상태에서 현재의 주식 가격이 S 일 때 T 시간 이후의 주식 가격 X는 random한 값을 갖는 확률 변수이고 이 확률 변수의 분포 함수를 $\phi(x)$라고 하자. 그러면 $\phi(x)$는 현재의 주식 가격인 S를 Mean으로 갖는 정규 분포를 따른 다고 가정할 수 있을까? 가령 현재의 주식사격 S가 0에 가까울 경우에는 그렇다고 말할 수 없을 것이다. 따라서 정확한 표현은 상대적인 가격 변동이 정규 분포를 따른다는 것이다. 또한 시간이 한참 지난 후에는 더 커다란 가격 변동이 예상 되는데 즉 표준편차는 시간에 따라 증가하게 되는데 시간에 따라 선형적으로 증가하는 것이 아니라 제곱근에 비례하게 증가한다. 그러한 이유로 확률 분포 함수 $\phi(x) := \phi(x, S, \sigma\sqrt{T})$는 $dS/S = d\ln(S)$의 표준편차가 $\sigma\sqrt{T}$인 정규 분포를 따를 때의 주식 가격의 확률 분포함수라고 하자. 그러면 $S_T = x$경우의 option 가치는 $\max(E-x, 0)$이기 때문에 그 기댓값, 다시 말해 option의 가치는 다음과 같이 주어진다.

$$E-\overline{S} \equiv \int_0^\infty \max(E-x, 0)\phi(x, S, \sigma\sqrt{T})dx \tag{4}$$

그러면 이 식을 분석하여 위에서 직관적으로 설명한 것들을 유도할 수 있는지 살펴보자. 우선 위의 식은 S와 관계없이 양의 값을 갖는다. 다시 말해 S>E라고 해도 option의 가격이 0은 아니라는 것을 의미한다. 또한

$$\int_0^\infty \max(E-x, 0)\phi(x)dx > \int_0^\infty (E-x)\phi(x)dx = E-S.$$

따라서 변동률이 있을 경우에는 없을 경우에 비하여 option의 가격이 상승하게 된다. 또한 변동률이 증가하면 option의 가격은 더욱 상승하게 된다. Figure 1.5에는 위의 변동률만을 고려했을 경우의 option price인 (4)의 예가 주어졌다.

이제 위의 모든 요소를 결합하면 다음의 식으로 나타내어진다.

$$P(E,S,T) = e^{-rT}\int_0^\infty \max(E - e^{\mu T}x, 0)\phi(x, S, \sigma\sqrt{T})dx. \tag{5}$$

우리는 option price를 계산하는 하나의 방법을 소개하였다. 이 방법에서는 각각의 요소를 분리하여서 계산한 후에 이를 종합하는 전형적인 분리기법 splitting method를 사용하였다. 따라서 이러한 splitting method의 타당성을 언급해야 하는데 두 가지 이슈가 있다. 우선 각각의 요소가 동시에 작용할 경우 서로간의 상승효과 등이 발생해서 최종 값에 얼마만한 영향을 미칠 것인가 하는 것이다. 3절의 Black-Scholes equation을 모델로 한 경우에 이를 분석하였다. 그 결과 그 차이는 작다고 할 수 있다. Splitting method를 우리가 다루는 option pricing에 적용하는데 생기는 보다 근본적인 문제는 가치상승률 μ를 변동성 σ와 분리해서 생각 할 수 있는가 하는 문제이다. 앞에서 언급 했듯이 변동성 σ에 대한 가정은 가치 변동률 μ에도 영향을 미치기 때문에 조심해서 다루어야 한다. 자세한 논의는 우리가 하고자 하는 scope를 넘어서기 때문에 생략한다.

Figure 1.6 에는 위의 변동률, 이자율, 자산의 가치 상승률을 고려한 option price인 (5)의 예가 주어졌다.

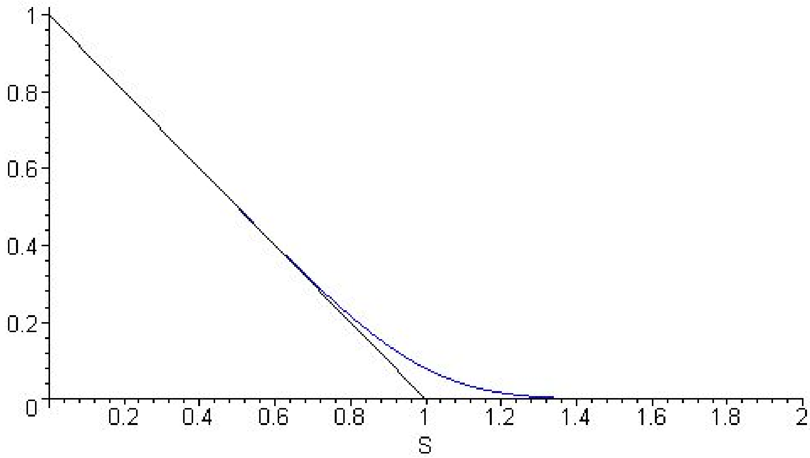


Figure 1.5. $\mu = r = 0$ 이고 $\sigma = 0.2$ 인 경우의 put option price (4).

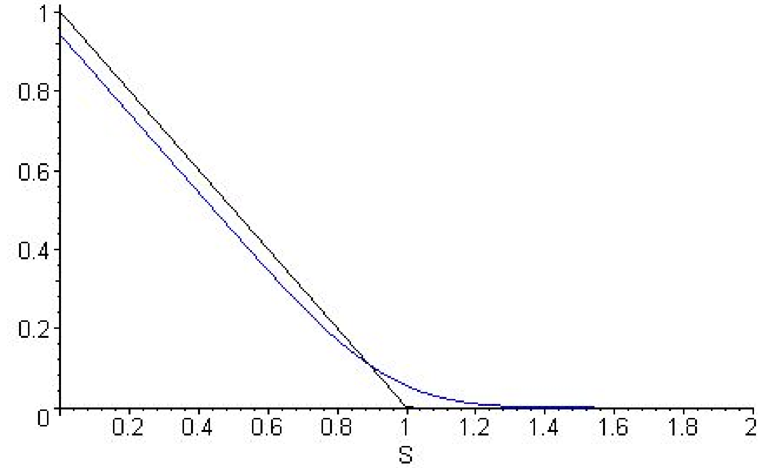


Figure 1.6. $T=1, E=1, \mu = r = 0.06$ 이고 $\sigma = 0.2$ 인 경우의 put option price (5).

1.4 다른 종류의 option

put option과 더불어서 중요한 option인 call option은 주어진 시간 T 이후에 미리 정해진 E 가격으로 주식을 살 수 있는 권리이다. 즉 writer의 책상에 가서 주식을 call 할 수 있는 권리이다. call option의 가격도 E, S, T의 함수, 즉 P=P(E,S,T)라고 할 수 있다. 주식을 시세보다 싸게 사야 가치가 있으므로 call option의 만료시점에서의 가치 다시 말해 payoff function은 다음과 같다.

$$P(E,S,T) = \max(S-E,0).$$

보다 일반적인 option의 만료 시점에서의 payoff function이 $PO(S)$로 주어졌다고 하자. 그러면 식 (5)를 유도한 원리에 의해서 다음을 얻는다.

$$P(S,T) = e^{-rT}\int_0^\infty PO(e^{\mu T}x)\phi(x)dx. \qquad (*)$$

option은 계약에 의해 만들어지고 다양한 방법으로 다양한 payoff function을 만들 수 있으며 그러한 option의 가격을 계산 할 수 있다. 중요한 것은 사람들이 많이 사갈만한 option을 만드는 것이다. 그리고 이러한 option을 위에서 계산한 가격보다 조금 더 비싸게 팔수 있다면 평균적으로 돈을 버는 것이다. 여기서 평균적이라는 말은 다양한 종류의 option을 많이 그리고 비싸게 팔게 되면 돈이 남는다는 것이다. 그러나 put option을 많이 팔았는데 주식 가격이 폭락해서 엄청난 손실을 볼 수도 있다. 이러한 것을 피하기 위해서 hedging이라는 작업을 하게 되는데 risk를 제거하는 작업이다. 물론 risk를 제거하게 되면 돈을 크게 벌 경우도 제거된다. 그러나 작은 차액이라도 risk없이 창출할 수 있다면 아주 매력적인 일이다. 다음은 어떻게 risk를 없애는지를 보여주는 가장 간단한 경우 중의 하나인, 소위 put-call parity라는 개념을 소개 한다.

option 및 주식 등을 이용해서 여러 가지 portfolio를 구성할 수 있다. 여러 가지 상품을 사서 portfolio를 구성할 수도 있지만 option 및 주식 등을 팔아서 구성할 수도 있음에 유념하자. 그리고 이러한 구성을 통해서 아무 risk가 없는 상품을 만들 수가 있다. 가령 주식 하나와 put option 하나를 사고 그리고 call option하나를 팔아서 구성한 portfolio를 생각해 보자. call option 하나를 팔아서 portfolio를 구성 했다는 것은 call option을 발행해서 생긴 미래 시점에서의 가능한 채무를 portfolio에 전가 했다는 말이다. 이 경우 완료 시점에서의 payoff는 다음과 같다.

$$S + \max(E-S,0) - \max(S-E,0) = E.$$

다시 말해 이와 같이 구성한 portfolio는 아무런 risk가 없다. 그리고 그 portfolio의 현재 가치는 위의 식을 통해 $e^{-rT}E$가됨을 자명하게 알 수 있다. 따라서 call option과 put option을 좋은 값에 사고팔아서 $e^{-rT}E$보다 싸게 구성 할 수 있다면 돈을 버는 것인데 그러한 눈먼 돈은 찾기 힘들다.

문제 1: 이제까지의 modeling에서 확정적인 식을 주지 못한 부분이 확률 분포 함수 $\phi(x)$

이다. 위의 식 (*)는 다음과 같이 계산 되어 질 수 있음을 보이라.

$$P(S,T)=e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}PO(e^{x+\mu T})\varphi(x,\ln S,\sigma\sqrt{T})dx. \qquad (6)$$

단 여기서 $\varphi(x,M,\sigma)$는 평균이 M 표준편차가 σ인 정규 분포 함수로 다음으로 주어진다.

$$\varphi(x,M,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-M)^2/2\sigma^2}.$$

표준 정규본포는 $M=0,\sigma=1$인 경우이다. 이 경우 간단하게 $\varphi(x)$로 표기 하겠다. 즉,

$$\varphi(x):=\varphi(x,0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

문제 2: 위의 Figure 1.4를 보면 option 가격이 T=0인 경우와 $\mu=r$, $\sigma=0$인 경우 평행함을 볼 수 있다. exactly 평행인가 그냥 그렇게 보일 뿐인가?

문제 3: 이제까지는 주로 E가 정해 졌을 때 S에 따른 option pricing을 고려하였다. Exercise price E는 실제에서도 고정된 값이고 주식의 가격은 변동성이 있는 것이기에 그리 하는 것이 더 의미가 있기 때문이다. 그러나 위에서 주어진 식들은 E,S,T의 함수로 주어 졌기 때문에 임의의 2개의 변수를 고정 시키고 다른 하나의 변수에 대한 그래프로 바라보는 것은 또 다른 의미를 부여해 준다. 가령 T=0인 경우의 put option price를 S가 주어진 상태에서 E의 함수로 그려보고 의미를 찾아보라.

문제 4: 위의 접근에서는 option의 가격에 영향을 미치는 세 가지 요소인 이자율, 자산의 가치 상승률, 변동성의 영향을 따로 계산한 후에 이를 모두 결합하는 식으로 소위 splitting method의 idea를 갖고 계산 하였다. 그렇다면 만약 T가 충분히 작지 않을 경우에는 서로의 상호 작용에 의한 요소가 중간 과정에서도 일어날 수 있는데 이러한 영향을 어떻게 고려할 수 있겠는가? 과연 차이가 날까? 그 차이를 비교할 수 있는가?

참고: 위의 식 (6)은 전 구간에서의 적분이다. 그러나 정규분포의 특성상 전 구간에서 적분할 필요는 없다. 5 표준편차 거리 안에 들어올 확률이 0.9999994 정도 되니까 넉넉잡아 Mean을 중심으로 5 표준편차만을 적분하여도 충분 하다.

2. 변동성에 관한 stochastic 모델링.

이제는 deterministic한 모델이 아니라 stochastic한 모델을 고려해 보자. 다른 많은 모델에서와 같이 상대 변화율 $\frac{dS}{S}$을 고려하면 간단한 형태의 stochastic differential equation을 만들 수 있다. 우선 단위 시간 dt 후의 평균 자산 가치 상승률은 μdt로 주어지고 주식가격

의 random한 변동을 나타내는 random variable을 dY라고 하면

$$\frac{dS}{S} = dY + \mu dt \tag{7}$$

를 만족한다. 여기서 dY는 mean이 0인 정규 분포를 따른다고 하자. 이러한 가정은 폭넓게 받아들여지는 가정이지만 논쟁의 소지가 있다. volatility를 보다 분명히 보여 주기 위해서 dX를 mean이 0 이고 variance가 dt인 (따라서 표준 편차는 $\sqrt{dt}$인) 정규 분포를 따르는 random variable 이라고 하자. 그러면 어떤 상수가 존재해서 $dY = \sigma dX$를 만족하는데 바로 이 상수가 앞에서 언급된 volatility이다. 따라서 위의 식은 다음의 stochastic differential equation으로 쓰여 진다:

$$\frac{dS}{S} = \sigma dX + \mu dt. \tag{8}$$

위에서 주어진 random variable dX에 의해 주어지는 주식 (또는 다른 종류의 자산)이 있다하고 (S_i, μ_i, σ_i)를 i번째 주식의 가격, 가치 상승률, volatility라고 하자. 같은 random variable을 따른다는 말은 주식들의 가격 변동이 같이 오르고 같이 떨어지고 한다는 말이고 그 폭은 각자의 volatility σ_i에 의해 결정된다는 말이다. 이 경우 가치 상승률과 변동성은 다음의 관계를 만족한다.

$$\frac{\mu_i - r}{\sigma_i} = \frac{\mu_j - r}{\sigma_j} \quad \text{for} \quad \text{all} \quad i \neq j. \tag{9}$$

문제 1: (9)를 만족 하지 않는 경우에는 arbitrage가 발생함을 보이시오. (힌트: put-call parity의 경우에서처럼 한 종류의 주식 및 option을 적당량 사고 다른 주식 및 option은 적당량 팔아서 변동성을 죽일 수 있다. 그러한 방법으로 arbitrage가 발생한다는 것을 보일 수 있다.)

위의 stochastic model의 의미에 대해서 자세하게 설명해 보자. 이전에 사용한 splitting method의 논리를 따르겠다. 우선 변동성이 없을 경우 즉 $\sigma = 0$인 경우를 먼저 생각해 보자. 그러한 경우 위의 모델은 시간 t에서의 주식가격을 다음으로 모델 한다.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt \quad \Rightarrow \quad S = S_0 e^{\mu t}.$$

여기서 비례상수 μ는 자산의 평균가치 상승률 S_0는 현재 시간 즉 $t = 0$에서의 주식의 가격이다. 위의 식은 dt 시간 이후의 주식가격의 상대적 변화율은 dt에 비례 한다는 것이다. 물론 위의 식은 dt가 충분히 작을 때 즉 미분의 개념으로 의미를 갖는 것이며 $\sigma = 0$인 경우에는 deterministic한 일반적인 미분방정식 이다.

2.1 stochastic 모델의 의미

위에서 dY는 주식의 random한 가격 변동을 나타내고 mean이 0 인 random variable로 정규 분포를 따른다고 했다. 본 절에서는 이 의미에 대해 생각해 보자. 일단 dt와 dY의 차이를 생각해 보자. dt는 충분히 짧은 시간 간격을 의미한다. 물론 위 식은 실질적으로는 differential equation의 의미를 갖기 때문에 dt가 0으로 수렴하는 경우의 극한으로써 의미를 갖지만 충분히 작은 그러나 정해진 시간 간격으로 생각하면 적당하다. 반면에 주식의 random한 가격 변동을 나타내는 dY는 주어진 dt시간 이후의 주식가격 변동량을 나타내는 것이기 때문에 0을 기준으로 해서 양수일 수도 음수일 수도 있다. dt는 그 크기가 정해 졌지만 dY는 그 크기도 정해지지 않았다. 다만 앞에 d를 붙인 것은 dt의 경우처럼 극한으로서 의미를 갖기 때문이다.

그러면 dY가 정규 분포를 따른다는 의미는 무엇인가. 우선 표준 정기 분포가 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$으로 주어진다는 것을 기억하자. 일단 표준 정규 분포를 따르는 random variable을 ξ라고 하자. 이 의미는 variable ξ는 임의의 값을 가질 수 있지만 가령 −1과 1사이의 값을 가질 확률은 $\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx \cong 0.68$정도 된다는 의미이다. 그러면 variance가 dt인 정규 분포를 따르는 random variable은 무엇인가. 분산이 dt이면 표준 편차는 $\sqrt{dt}$ 이 된다. 따라서

$$dX=\xi\sqrt{dt}$$

라고 하면 바로 이 random variable dX가 식 (8)에 있는 것이다. 여기서 dX가 따르는 확률분포 함수는 $\varphi(x/\sqrt{dt})/\sqrt{dt}$ 가 된다. dX와 ξ가 따르는 정규 분포를 Figure 2.1에 비교 하였다.

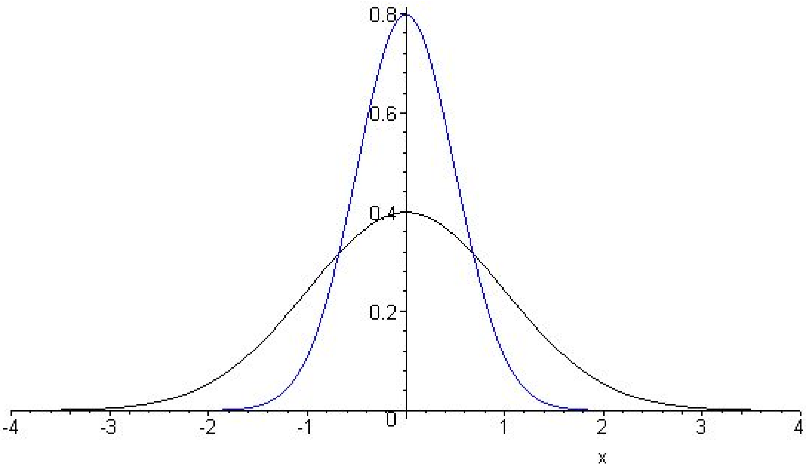


Figure 2.1 표준편차가 1인 표준 정규 분포와 표준편차가 $\sqrt{dt}=0.5$인 정규 분포

dY도 정규 분포를 따른다고 가정 하였으므로 dX와는 다른 분산을 가질 것을 고려해서 어떤 상수 σ가 존재하여 $dY=\sigma dX$를 만족 할 것이다. 이 상수를 우리는 volatility라고 부른다.

문제2 :그렇다면 dY의 분산과 표준 편차가 무엇이라는 말인가?

답: 확률변수 random variable dY의 표준 편차는 $\sigma\sqrt{dt}$ 이고 분산은 $\sigma^2 dt$이다.

한편 dY, dX 등이 극한으로서 의미를 갖는 random variable 이기 때문에, 위의 setting이 의미가 있기 위해서는 σ는 dt가 0으로 수렴을 해도 변하지 않아야 한다. 조금 더 정확하게 말하면 dt가 0으로 수렴할 경우 σ도 어떤 상수로 수렴해야 하는데 그 수렴 상수가 의미가 있는 volatility이고 처음부터 σ를 이 수렴 상수로 생각하는 것이 맞는 말이다.

그러면 dY가 표준 편차가 $\sigma\sqrt{dt}$ 이라면 주식가격의 변동 폭이 시간의 제곱근에 비례한다는 말이다. 즉 $dt=1$이면 주식이 $-\sigma$와 σ 사이에서 움직일 확률이 64% 정도 된다는 말이다. 물론 평균 자산 가치 상승률은 없을 경우이고 고려할 경우에는 μdt 정도를 더해 주어야 한다. 우리는 단위는 이야기 하지 않았다. 이자율 등을 연이자로 생각한다면 위의 시간 단위는 년이고 다른 상수들의 단위도 적당하게 고려 할 수 있어야 한다.

문제 3:그렇다면 우리나라 증권시장의 volatility는 어는 정도 되나?

또한 dY의 표준 편차가 $\sigma\sqrt{dt}$ 이라는 말은 시간을 1/4로 줄여서 생각하면 그 기간 후의 주식 가격의 변동은 반 정도로 준다는 말이다. 과연 정말로 주식 가격의 변동이 이러한 성질을 갖는 것일까? 이전의 주식가격 변동을 살펴보면 그러한 경향이 있다는 것을 말할 수 있다. 물론 그런 시각으로 보니까 그럴 수도 있다. 따라서 좋은 근거는 아니다. 조금 더 근본적인 이유는 이러한 관계가 바로 random walk이라는 현상 (또는 모델)의 구조이고 따라서 random walk을 사용해서 주식시장의 변동성을 모델 하고자 한다면 이 경우가 될 수밖에 없는 것이다. 그리고 주식시장의 성격상 random walk모델이 타당하다는 증거들이 많이 있고 그러한 이유로 위의 가정은 폭넓게 받아들여지고 있다.

2.2 기댓값 Expectation

임의의 random variable X가 확률밀도함수 $f(x)$를 따른다고 하자. (물론 우리는 dX가 분산이 dt인 정규 분포를 따르는 경우임으로 이 경우 $f(x)=\varphi(x,M,\sqrt{dt})$으로 주어진다.) 이 경우 random variable X를 변수로 갖는 함수 $\Phi(X)$의 expectation은 다음과 같이 정의된다.

$$E(\Phi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)f(x)dx.$$

그 중 특히 $E(X)$은 확률변수 X의 평균값 mean, $Var(X)=E(X^2)-E(X)^2$는 분산 variance 이라고 한다.

문제 4: 우리가 고려하고 있는 확률 변수 dX에 대하여 $E(1)=1$, $E(dX)=0$ 그리고 $E(dX^2)=dt$ 임을 보이시오.

(8)에서 주어진 식을 dS에 대해 다시 적으면 다음과 같다.

$$dS = \sigma S dX + \mu S dt, \qquad dS^2 = \sigma^2 S^2 dX^2 + 2\sigma\mu S^2 dt dX + \mu^2 S^2 dt^2. \tag{10}$$

따라서 dS의 mean과 variance를 계산하면 다음과 같다.

$$E(dS) = \sigma S E(dX) + \mu S dt E(1) = \mu S dt,$$
$$Var(dS) = E(dS^2) - E(dS)^2 = \sigma^2 S^2 E(dX^2) = \sigma^2 S^2 dt.$$

2.3 Ito's Lemma

식 (10)의 dS^2의 세 개의 항 중에서 첫 항이 포함하고 있는 dX^2을 생각해 보자. 우선 dX^2은 random variable 임에 주목하자. 그 expectation은 이미 dt임을 앞의 문제에서 보였다. 그러나 random variable 이라고 하더라도 항상 양의 값을 갖는다. 그런데 이러한 항들은 그 극한으로서 의미를 갖는 것이기 때문에 dt가 극한의 의미로 충분히 작은 경우를 생각해야 한다. 따라서 분산이 dt이라면 random하게 증가 한다고 해도 약간만 macroscopic 하게 바라보면 거의 constant speed로 증가한다는 의미고 극한의 개념이기 때문에 실제로도 그러하다. 이 대략적인 설명을 보다 자세하게 생각해 보자. 만약 시간에 따라 증가하는 함수 $M(t)$가 다음을 만족한다고 하자.

$$dM = dt \qquad \text{or} \qquad M'(t) = 1.$$

쉽게 $M(t) = M(0) + t$임을 알 수 있다. 그러면 다음 stochastic equation을 생각해보자.

$$dM = dX^2.$$

dX^2은 기댓값이 dt 임으로 $M(t)$는 위의 deterministic 한 경우와 같이 그 기댓값이 $M(0)+t$과 같을 것이다. 그렇다면 표준 편차는 얼마나 될지 생각해 보자. dX의 표준 편차가 $\sqrt{dt}$ 이므로 dX^2의 표준 편차는 근사적으로 dt의 order를 갖는다. (물론 dX^2은 정규 분포가 아니고 위의 표현은 idea를 주기 위한 것일 뿐이다. 조금 더 엄밀한 표현을 위해서는 다른 접근을 해야 하지만 위의 설명으로도 충분한 직관을 주기 때문에 생략하겠다.) 따라서 시간 $t > 0$후에는 $\frac{t}{dt}$의 횟수만큼 실행을 하게 되고 그 경우의 표준 편차는 실행 횟수의 제곱근에 비례하게 되므로 시간 t에서의 $M(t)$의 표준 편차는 다음과 같다.

$$C dt \sqrt{\frac{t}{dt}} = C\sqrt{t dt} \to 0 \qquad \text{as} \qquad dt \to 0.$$

따라서 표준 편차는 극한의 개념에서는 0이 되고 stochastic한 양인 dX^2는 실질적으로

deterministic한 양인 dt와 같은 의미를 갖는다. 따라서 앞으로는 dX^2을 dt로 치환해서 생각한다. Ito's lemma는 이러한 관찰에 기반을 둔다.

Random variable dX에 의해 stochastic한 성질을 갖는 주식가격 S 및 S에 의해 정해지는 함수 $f(S)$가 충분히 미분 가능하다고 하자. Taylor 전개를 하면 다음을 얻는다.

$$df = \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dS^2}dS^2 + \cdots .$$

(10)에 주어진 dS, dS^2와 $dX = O(\sqrt{dt})$를 함께 고려해서 그리고 dt 가 충분히 작은 경우의 처음 두 개의 leading order term을 고려해 보면 다음을 얻는다.

$$df = \frac{df}{dS}(\sigma S dX + \mu S dt) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2f}{dS^2}dt = \sigma S \frac{df}{dS}dX + (\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2f}{dS^2})dt.$$

여기서 처음 term은 dX를 포함한 term들 중의 leading term이고 두 번째 term은 dt를 포함한 것들 중의 leading term이다. 여기서 두 개의 term을 비교해 보면 $dX = O(\sqrt{dt})$이므로 dX term이 더 크다고 할 수 있다. 그러나 expectation을 고려해 보면 dX term은 mean zero 이고 dt term은 non-zero mean을 갖기 때문에 다른 성질을 갖고 있다. 따라서 다른 두 개의 성질을 다 포함하기 위해서는 두 개의 term이 모두 필요하다.

만약 함수 f가 시간에 대한 함수이기도 하면, 즉 $f = f(S,t)$이면 상미분이 아니라 편미분을 생각해야 하고 두 개의 변수에 대해서 Taylor expansion을 사용하면 다음을 얻는다.

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dS^2 + \cdots .$$

같은 방법으로 leading order term 만을 고려하면 다음과 같다.

$$df = \sigma S \frac{\partial f}{\partial S}dX + (\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t})dt. \tag{11}$$

3. The Black-Scholes Model

3.1 randomness의 제거와 Black-Scholes equation의 유도

주식가격과 시간에 따라 변동하는 특정한 option, 또는 portfolio의 주어진 시간에서의 가격 또는 가치를 $P(S,t)$라고 하자. 우선은 이 randomness를 제거하는 작업을 한다. 원리는 dt 간격의 작은 시간 동안 randomness가 없는 따라서 deterministic한 새로운 함수를 만들

어 내는 것이다. Δ를 시간 간격 dt 동안은 상수라 하고

$$\Pi = P(S,t) - \Delta S$$

라고 하자. 그러면

$$d\Pi = dP - d(\Delta S) = dP - \Delta dS \tag{12}$$

이고 (11)을 이용하여 다음을 얻는다.

$$d\Pi = \sigma S(\frac{\partial P}{\partial S} - \Delta)dX + (\mu S(\frac{\partial P}{\partial S} - \Delta) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + \frac{\partial P}{\partial t})dt.$$

따라서

$$\Delta = \partial P / \partial S \tag{13}$$

로 놓으면 다음의 deterministic한 differential equation을 얻는다.

$$d\Pi = (\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + \frac{\partial P}{\partial t})dt. \tag{14}$$

그러면 Π가 갖는 가치는 주식 변동에 의한 randomness를 제거하였으므로 시간만의 함수이고 arbitrage가 없다면 은행 이자율과 같은 가치 상승을 보여야 한다. 따라서 다음을 얻는다.

$$d\Pi = r\Pi dt = rP(S,t)dt - r\frac{\partial P}{\partial S}Sdt.$$

따라서 (14)의 식을 이용하면 $P(S,t),\ 0 < t < T,$은 다음의 Black-Scholes Equation을 만족한다.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rP(S,t) + rS\frac{\partial P}{\partial S} = 0, \quad P(S,T) = PO(S). \tag{15}$$

(주의: Δ는 dt 시간 간격 동안은 상수라고 해서 시작 했는데 (13)에서 $\Delta = \partial P / \partial S$로 놓는다는 것은 Δ가 상수가 아니라는 것을 의미하고 이 경우에는 (12)의 식이 성립하지 않는다. 다시 말해 (13)을 이용해서 얻은 Black-Scholes equation (15)의 option price P는 더 이상 처음 고려했던 option price가 아니다. 오히려 (13)의 방법을 이용하여 hedging을 할 수 있다면 이 가격의 초기 자금을 갖고 시작 하면 항상 pay off를 맞출 수 있는 가격을 의미한다. 반면에 식 (6)에서 주어진 option price는 그 option의 기댓값으로 이해 할 수 있다. 그렇다면 과연 (13)의 방법으로 항상 hedging이 가능 한가? 난 아닌 것 같다.)

여기서 현재 시간은 $t=0$이고 만료시간은 $t=T$이며 $PO(S)$는 만료 시점에서의 가치인 option의 payoff function 등이 된다. 여기서 우리가 하고 싶은 것은 시간을 완료 시점에서 부터 점차 감소 시켜서 $t=0$에서의 option의 가치를 얻는 것이다. 그런데 시간을 감소 시켜 나간다는 것은 금융계에 종사하는 사람들에게는 일상적일 수도 있지만 일반적인 PDE를 하는 사람들에게는 성가신 일이다. 따라서 새로운 시간 변수 $\tau = T-t$를 사용 하면 $P_t = P_\tau \tau_t = -P_\tau$이고 이를 이용해서 (15)를 정리하고 다시 τ를 t로 바꾸어 쓰면 다음과 같다.

$$P_t - rSP_S = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{SS} - rP, \quad P(S,0) = PO(S), \quad S > 0,\ 0 < t < T. \quad (16)$$

이 식에서는 payoff function이 $t=0$에서의 initial value 가 되고 final time인 $t=T$에서의 값이 원하는 option의 가격이 된다. 1장에서 주식가격 S에 대한 변동률 보다는 relative 변동율 즉 dS/S가 더 중요하게 쓰인다는 것을 보았다. 따라서 다음의 change of variable을 고려하는 것은 자연스럽다.

$$\ln S = x \ \Rightarrow\ S = e^x,\ \ \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S},\ \ P_S = \frac{P_x}{S},\ \ P_{SS} = \frac{P_{xx} - P_x}{S^2}.$$

따라서 위의 식은 다음으로 변형 된다.

$$P_t - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)P_x = \frac{1}{2}\sigma^2 P_{xx} - rP, \quad P(x,0) = PO(e^x), \qquad (17)$$

단 $x \in R,\ 0 < t < T$ 이다. 다음에는 식 (17)이 갖는 의미를 분석 하자. 이 식과 같이 여러 항이 복합적으로 작용할 경우 각 항을 따로 분석하면 각 항이 갖는 의미를 이해하는데 도움이 된다. splitting method를 다시 사용하겠다는 의미이다. 이와 같이 각 항의 역할을 따로 이해하는 작업은 Black-Scholes equation 과는 별도로 일반적인 편미분 방정식을 이해하는데도 도움을 준다.

참고: 때론 notation을 엄밀하게 사용 하는 것 보다는 적당하게 틀리게 사용하는 것이 더 의미가 명확하고 간결할 경우가 있다. 위의 식 (17)에서의 함수 P는 변수 x를 사용하고 (16)에서는 S를 사용한다. 따라서 이 둘은 다른 함수 이고 같은 기호인 P를 사용하는 것은 기호를 혼동해서 사용하는 경우이다. 따라서 P를 x를 사용해서 그래프로 그리면 전 구간 함수를 의미하고 S를 사용해서 그린다는 것은 양의 구간에서 정의 된 함수를 의미한다.

3.2 The source term indicates the interest

식 (17)에서 x에 대한 미분이 있는 항들을 제거한 다음의 식을 고려해 보자.

$$P_t = -rP, \quad P(x,0) = PO(e^x), \quad 0 < t < T. \qquad (18)$$

식 자체는 시간에 대한 ODE 이므로 쉽게 그 해가

$$P(x,t) = e^{-rt} PO(e^x)$$

임을 알 수 있다. 즉 시간에 따라 감소하게 되며 put option의 payoff function을 사용하여 그 해를 S 변수를 사용해서 그리면 정확하게 Figure 1.3이 얻어 짐을 쉽게 알 수 있다. 다시 말해 source term $-rP$는 이자에 의해 감소하는 다시 말해 만약에 처음의 시간 변수로 돌아가면 시간에 대해 증가하는 term을 의미한다.

3.3 The convection term 은 가치 상승을 의미한다.

이번에는 x에 대한 1차 미분인 convection term을 고려해 보자. 그러면 다음의 식을 얻는다.

$$P_t - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)P_x = 0, \quad P(x,0) = PO(e^x), \quad 0 < t < T. \tag{19}$$

이 식은 linear wave equation이라고 부른다. initial value가 그 형태를 유지하고 시간이 지남에 따라 P_x의 계수 즉 $-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)$의 속도로 움직이는 것을 말한다. 그 해는 다음과 같다.

$$P(x,t) = P(x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t, 0) = PO(e^{x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}).$$

이 해를 S 변수를 사용해서 그래프로 그리면 Figure 1.2를 얻는다. 다시 말해 이 convection term은 가치의 상승률과 같은 작용을 하게 되는데 계수 $r-\frac{1}{2}\sigma^2$는 1장의 μ의 역할을 하고 있다.

3.4 The diffusion term 은 volatility를 의미한다.

이번에는 마지막 남은 x에 대한 2차 미분인 diffusion term을 고려해 보자. 그러면 다음의 식을 얻는다.

$$P_t = \frac{1}{2}\sigma^2 P_{xx}, \quad P(x,0) = PO(e^x), \quad 0 < t < T. \tag{20}$$

이 편미분 방정식은 heat equation이라는 이름으로 잘 알려져 있다. 여기서 diffusion constant는 1이 아닌 $\sigma^2/2$인 경우이다. 이 방정식은 열의 분포가 어떻게 퍼져 나가는지를 설명하는 것으로 diffusion constant가 클수록 빠르게 퍼져 나가고 0에 가까우면 천천히 퍼져 간다. 그해는 소위 convolution을 이용하여 explicit 하게 주어진다. S 변수를 사용해서 나타내면 다음과 같다.

$$P(S,t) = \int_{-\infty}^{\infty} PO(e^x)\varphi(x, \ln S, \sigma\sqrt{T})dx. \tag{21}$$

이제 이 세 가지의 요소를 다 합하면 다음의 해를 얻는다.

$$P(S,T) = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} PO(e^{x+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T})\varphi(x,\ln S,\sigma\sqrt{T})dx. \qquad (22)$$

우리는 1장에서 얻은 식 (6)과 the Black-Scholes equation (16) 그리고 이를 통해서 얻은 식(22)을 이용해서 option 등의 가치를 평가하는 방법을 얻었다. (6)과 (22)식을 비교 하면 그 차이는 (6)에 있는 μ가 (22)식에서는 $r-\frac{1}{2}\sigma^2$로 바뀌었다는 것이다. 그러나 가령 volatility가 0이 되는 경우는 arbitrage가 없기 위해서는 $\mu = r$을 만족해야 하고 이 경우는 따라서 두 개의 식이 같은 option price를 준다.

3.5 종합적인 영향

위의 예에서는 각 항을 따로 고려해서 (22)의 식을 얻었다. 그러나 과연 위의 전체 식을 풀면 어떠한 차이가 있을 것인가를 알아보자. 쉬운 방법이 위의 식을 heat equation으로 치환해서 exact 하게 푸는 것이다. 변수 변환 $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2 t$를 사용하면 (17)은 다음으로 변환된다.

$$P_\tau - (k-1)P_x = P_{xx} - kP, \quad P(x,0) = PO(e^x), \qquad k = \frac{2r}{\sigma^2}. \qquad (23)$$

이 식을 다시 변수 변환 $P(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} p(x,\tau)$를 사용하면 다음으로 변환된다.

$$p_{t=}p_{xx}, \quad p(x,0) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} PO(e^x), \qquad k = \frac{2r}{\sigma^2}. \qquad (24)$$

Heat equation의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$p(y,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)x} PO(e^x)\varphi(x,\ln S,\sigma\sqrt{T})dx. \qquad (25)$$

이제 다시 처음의 variable로 돌아가면 다음을 얻는다.

$$P(S,T) = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(x-\ln S)/\sigma^2 - \frac{1}{2}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)^2 T/\sigma^2} PO(e^x)\varphi(x,\ln S,\sigma\sqrt{T})dx. (26)$$

Black-Scholes equation에 splitting method를 적용하여 얻은 식 (22)와 equation을 정확하게 계산하여 얻은 식 (26)이 차이가 남을 보았다. 그렇다면 이 두 식을 통해 얻은 값의 차이는 얼마나 될까? Figure 3.1에는 이 차이를 그래프로 보였다. 즉 아주 작은 차이가 있을 뿐이었다.

3.6 참고

우리는 1장에서 얻은 식 (6)과 the Black-Scholes equation (16) 그리고 이를 splitting을 통해서 얻은 식 (22) 전체를 풀어서 얻은 식 (26)을 이용해서 option 등의 가치를 평가하는 방법을 얻었다. (22)와 (23)은 거의 같은 결과를 준다. 만약 $r-\frac{1}{2}\sigma^2 = 0$이면 (22)와 (23)은 일치한다. 그런데 이 경우는 간단하게

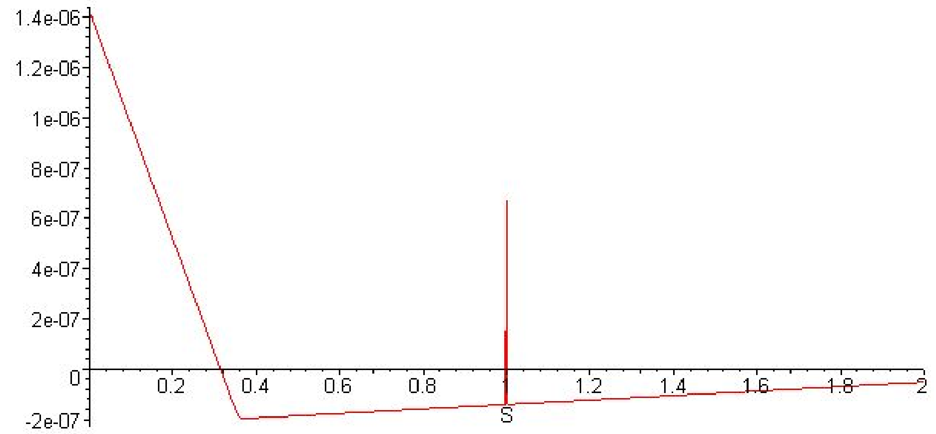


Figure 3.1 Splitting method와 non-splitting method의 차이

$$P(S,T) = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} PO(e^x)\varphi(x, \ln S, \sigma\sqrt{T})dx$$

으로 주어진다. 즉 이자에 의한 변동과 volatility에 의해서만 가격이 결정 된다는 것이다. 가령 $r=0.45, \sigma=0.3$이면 이 경우에 해당 된다.

참고: 다른 접근법.

이제까지의 식의 전개는 주식 가격 S를 중심으로 이루어진 것 같지만 실제적으로는 $\ln(S)$를 매개로 이우어졌다. 따라서 처음부터 새로운 변수 $L=\ln(S)$을 중심으로 전개 시키는 것이 더 간편하다. 이 경우 다음을 얻는다.

$$dL = \sigma dX + \mu dt, \qquad dL^2 = \sigma^2 dX^2 + 2\sigma\mu dt dX + \mu^2 dt^2. \tag{27}$$

따라서 dL의 mean과 variance를 계산하면 다음과 같다.

$$E(dL) = \mu dt, \;\; Var(dL) = E(dL^2) - E(dL)^2 = \sigma^2 E(dX^2) = \sigma^2 dt.$$

Random variable dX에 의해 stochastic한 성질을 갖는 L 및 L에 의해 정해지는 함수 $f(L)$가 충분히 미분 가능하다고 하자. Taylor 전개를 하면 다음을 얻는다.

$$df = \frac{df}{dL}dL + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dL^2}dL^2 + \cdots .$$

(27)에 주어진 dL, dL^2와 $dX = O(\sqrt{dt})$를 함께 고려해서 그리고 dt 가 충분히 작은 경우의 처음 두 개의 leading order term을 고려해 보면 다음을 얻는다.

$$df = \sigma\frac{df}{dL}dX + (\mu\frac{df}{dL} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{d^2f}{dL^2})dt.$$

만약 함수 f가 시간에 대한 함수이기도 하면, 즉 $f = f(L,t)$이면 상미분이 아니라 편미분을 생각해야 하고 두 개의 변수에 대해서 Taylor expansion을 사용하면 다음을 얻는다.

$$df = \frac{\partial f}{\partial L}dL + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial L^2}dL^2 + \cdots .$$

같은 방법으로 leading order term 만을 고려하면 다음과 같다.

$$df = \sigma \frac{\partial f}{\partial L} dX + (\mu \frac{\partial f}{\partial L} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} + \frac{\partial f}{\partial t}) dt. \tag{28}$$

Δ를 시간 간격 dt 동안은 상수라 하고

$$\Pi = P(L,t) - \Delta L \tag{29}$$

라고 하자. 그러면

$$d\Pi = dP - d(\Delta L) = dP - \Delta dL$$

이고 (28)을 이용하여 다음을 얻는다.

$$d\Pi = \sigma(\frac{\partial P}{\partial L} - \Delta) dX + (\mu(\frac{\partial P}{\partial L} - \Delta) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial L^2} + \frac{\partial P}{\partial t}) dt.$$

따라서

$$\Delta = \partial P / \partial L$$

로 놓으면 다음의 deterministic한 differential equation을 얻는다.

$$d\Pi = (\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial L^2} + \frac{\partial P}{\partial t}) dt.$$

그러면 Π가 갖는 가치는 시간만의 함수이고 arbitrage가 없다면 은행 이자율과 같은 가치 상승을 보여야 한다. 따라서 다음을 얻는다.

$$d\Pi = r\Pi dt = rP(L,t)dt - r\frac{\partial P}{\partial L} L dt.$$

따라서 변수 변환 $t \rightarrow -t$을 이용하면 $P(L,t),\ 0 < t < T$,은 다음을 만족한다.

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial L^2} + rP(L,t) - rL\frac{\partial P}{\partial L} = 0, \quad P(L,0) = PO(e^L). \tag{30}$$

그런데 이 식을 (17)과 비교해 보면 diffusion 및 source term은 일치 하지만 convection term은 일치하지 않음을 알 수 있다. 전개에서 차이가 있다면 오직 (29) 식이 이전의 접근과는 다른 부분이다. 즉 (29)은 $\Pi = P - \Delta \ln(S)$ 로 놓은 셈이고 따라서 이전의 접근과는 다른 결과를 주는 것이다. 물론 $\Delta = \partial P / \partial L$이 상수가 아니라서 아직도 믿기 힘들지만 같은 논리로 유도해서 다른 결과를 얻은 것은 신뢰도를 떨어트린다.

다음엔

$$\Pi = P(L,t) - \Delta e^L \tag{29'}$$

라고 하자. 그러면

$$d\Pi = dP - d(\Delta e^L) = dP - \Delta((\sigma e^L) dX + (\mu e^L + \frac{1}{2}\sigma^2 e^L) dt)$$

이고 (28)을 이용하여 다음을 얻는다.

$$d\Pi = \sigma(\frac{\partial P}{\partial L} - \Delta e^L) dX + (\mu(\frac{\partial P}{\partial L} - \Delta e^L) + \frac{1}{2}\sigma^2(\frac{\partial^2 P}{\partial L^2} - \Delta e^L) + \frac{\partial P}{\partial t}) dt.$$

따라서

$$\Delta e^L = \partial P / \partial L$$

로 놓으면 다음의 deterministic한 differential equation을 얻는다.

$$d\Pi = (\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{\partial^2 P}{\partial L^2} - \frac{\partial P}{\partial L}) + \frac{\partial P}{\partial t})dt.$$

그러면 Π가 갖는 가치는 시간만의 함수이고 arbitrage가 없다면 은행 이자율과 같은 가치 상승을 보여야 한다. 따라서 다음을 얻는다.

$$d\Pi = r\Pi dt = rP(L,t)dt - r\frac{\partial P}{\partial L}dt.$$

따라서 변수 변환 $t \to -t$을 이용하면 $P(L,t),\ 0 < t < T,$은 다음을 만족한다.

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial L^2} + rP(L,t) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial P}{\partial L} = 0, \quad P(L,0) = PO(e^L). \qquad (30')$$

이 (29‘)은 이전의 B-S를 유도 했을 경우에 해당 되고 그 결과 같은 식을 유도 했다. 그렇다면 왜 (29)는 안 되고 (29‘)은 되는가?

^.^ 쉬어가기 ^.^

다음에 파생 상품과 관련한 최근의 기사를 하나 소개 한다. 이제는 조금 더 잘 이해 할 수 있을 것이다. 수정 없이 그대로 옮겼다.

파생상품 거래 세계 1위의 명암 [중앙일보]

(2008.04.20 20:57 입력)

정경민 경제부문 차장

못 먹어도 고(go)!’

우리나라 고스톱 판의 특징을 가장 잘 집약한 말을 찾는다면 이게 아닐까 싶다. ‘독박’을 쓸망정 3점 내고 ‘스톱(stop)’하면 좋은 소리 못 듣는다. 쪼쪼한 인간 취급 받기 십상이다. 한술 더 떠 ‘업(up)’이란 규칙도 있다. 3점 낸 사람이 돈 안 받고 판돈을 올리는 거다. 이어진 판에서 선을 쥔 사람이 이기면 4배, 나머지가 나면 2배로 판돈이 뛴다. 금융가 전문용어로 ‘레버리지(leverage)’를 확 높이는 거다. 지렛대(레버리지)로 물건을 들면 적은 힘으로도 무거운 물건을 들 수 있듯 판돈을 올려 ‘대박’을 노린다는 뜻이다.

도박성이 그만큼 강하다는 얘기지만 이게 꼭 해로운 것만은 아니다. 어쩌면 우리가 지금 이만큼 먹고살 수 있게 한 동력의 하나였는지도 모른다. 위험을 피하기보다 적극적으로 맞서려 한 무모함. 이게 없었다면 경부고속도로나 포항제철·반도체 신화가 가당키나 했겠나. 전 세계 전문가가 모두 코웃음 쳤을 때 “무슨 소리야. 못 먹어도 고!” 이 배짱 하나로 한강의 기적을 일궈낸 건 아니었을까.

한국인의 피에 흐르는 이 유전자는 투자시장에서 진면목을 드러냈다. 이름조차 생소한 파생상품시장에서다. 1997년 도입한 ‘코스피200 지수 옵션’이다. 거래소에 상장된 200개 우량 종목으로 구성한 코스피200 지수를 기초로 만든 파생상품이다. 옵션은 레버리지가 이

론상 무한대다. 운 좋게 터지면 수백 배 차익이 나지만 빗나가면 한 방에 알거지가 될 수도 있다. 이게 마약 같은 중독성을 발휘했다. 도입 2년 만인 99년 단숨에 거래량 세계 1위 파생상품이 됐다.

2001년 9·11테러는 불붙은 시장에 휘발유를 끼얹은 격이 됐다. 이날 코스피지수가 하루 만에 12% 폭락하는 바람에 코스피200 지수 옵션에서 무려 504배 대박이 터졌다. 일확천금을 꿈꾼 불나방들의 눈이 번쩍 뜨인 건 당연했다. 지난해 코스피200 지수 옵션 거래량은 26억4300만 계약. 2위인 유럽선물거래소(Eurex)의 '다우존스 유로 Stoxx50 지수 옵션' 거래량보다 10배 이상 많다. 경천동지할 이변이 없고선 앞으로도 코스피200 지수 옵션를 따라잡기 어려운 상태다. 여기다 96년 도입한 코스피200 지수 선물 거래량도 세계 8위다.

세계가 한국증권선물거래소를 벤치마킹하기 바쁘다. 국제금융가의 변방에 불과한 한국이 뉴욕·시카고·런던을 제치고 파생상품 거래의 메카가 된 비결은 대체 뭘까. 서구인의 눈엔 불가사의한 수수께끼처럼 보일 만도 하다. 국민 놀이가 된 고스톱에서조차 '못 먹어도 고'가 대세라는 걸 알 턱이 없을 테니 말이다.

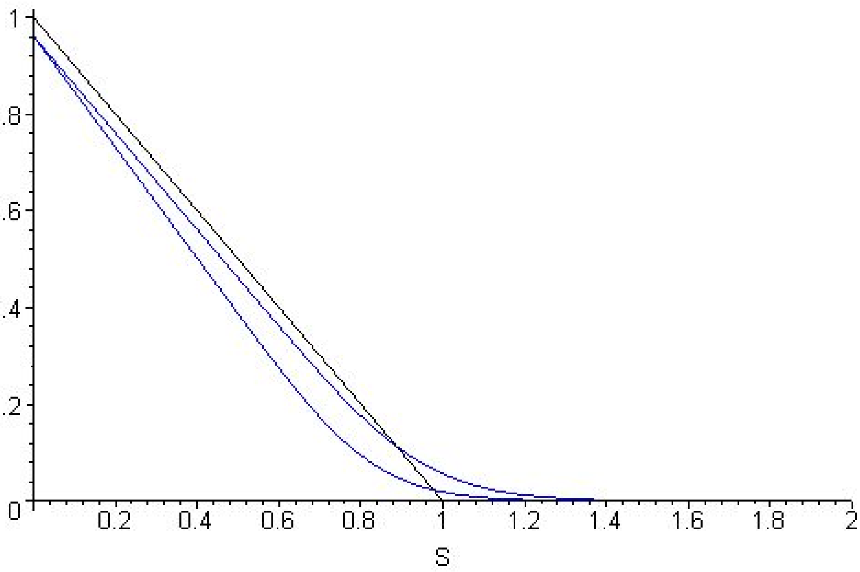
그러나 한국을 파생상품 선진국으로 만드는 과정에서 개인투자자가 치른 대가는 혹독했다. 2002~2006년 코스피200 지수 선물·옵션에서 개인은 2조842억원을 잃었다. 반면 증권사는 7556억원, 외국인은 1조3286억원을 땄다. 재야 고수가 선물·옵션으로 떼돈을 벌었다는 소문만 무성했지 막상 뚜껑을 열어 보니 개인은 기관과 외국인의 사냥감에 불과했다는 얘기다.

다음달 6일엔 새 파생상품이 나온다. 삼성전자·포스코·국민은행 등 거래소에 상장된 15개 종목을 대상으로 한 개별주식 선물이다. 옵션과 달리 선물은 단순하다. 쉽게 말해 미래 주가 알아맞히기 게임이다. 게다가 개별주식은 지수보다 변동성이 크다. 지수는 200개 종목의 등락을 평균한 거라 시장 흐름을 따라간다. 하지만 개별주식은 얼마든지 시장과 반대로 갈 수 있다. 14개가 다 오르는 날 한 종목만 빠질 수 있는 거다.

단순한 데다 변동성이 크다 보니 벌써부터 대박 꿈에 부푼 투자자가 문전성시다. 14개 증권사가 지난 7일부터 운영하고 있는 모의투자대회에 참가한 개인만 8300여 명이다. 하지만 이거 하나는 알아두자. 동서고금을 통틀어 파생상품 거래에서 개인이 기관을 이긴 적은 없다.

프로젝트 #1: 주제: 몬테 칼로 시뮬레이션을 통하여 위의 식 (6)과 (22)중 어느 식이 조금 더 주식 가격의 변동을 가깝게 설명하는지 비교하시오. 왜 위의 두 식과 시뮬레이션이 차이가 나는 지를 분석 하시오.

다음의 그래프는 위의 두 식을 이용하여 계산한 option 가격이다.



이때 각 상수로는 $\mu=0.4, \sigma=0.3, r=0.1, T=0.4$를 사용 하였고 위에 있는 그래프가 (22)의 식으로 계산한 것이고 아래의 그래프가 (6)의 식으로 계산한 것이다.

참고: (7)에 기반을 둔 몬테 칼로 시뮬레이션을 통하여 얻은 결과는 (22)가 아니라 (6)에 수렴함을 알 수 있다.

프로젝트 #2: Black-Scholes equation을 유도하는 과정에서의 문제점을 이미 지적 하였다. 그 문제점을 다음을 통하여 다시 확인해 보고 더 나은 방법이 있는지를 조사해 보자.

우선 표기 편의상 시간에 대한 의존성을 빼고 portfolio의 가치를 $P(S)$라고 하자. Black-Scholes equation의 유도는 결론적으로 $\Delta = P'(S)$로 놓고 식을 변형한 것이다. 그러나 이 경우 Δ는 상수가 아니다. 따라서 실제로는 처음부터

$$\Pi = P(S) - P'(S)S$$

라 하고 식을 유도했어야 했다. 그리하면

$$d\Pi = dP - d(P'S) = dP - P'dS + SdP' \tag{31}$$

이고 (11)을 이용하여 다음을 얻는다.

$$d\Pi = -\sigma S^2 P'' dX + (-\mu S^2 P'' + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P'')dt = -\sigma S^2 P'' dX + (\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu) S^2 P'' dt$$

만약 $dP=\sigma S(P')dX+(\mu SP'+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P'')dt$와 비교하면 P'을 $-SP''$로 바꾼 효과이다. 여기서 dP에 비해서 $d\Pi$의 randomness는 더 줄어든 것 같고 Black-Scholes는 이러한 randomness를 무시한 경우의 간단한 model이다. 위의 식에서 randomness가 있는 항만을 소거하면 다음을 얻는다.

$$d\Pi=((\frac{1}{2}\sigma^2-\mu)S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}+\frac{\partial P}{\partial t})dt. \qquad (32)$$

이 식을 기반으로 해서 얻은 변형된 Black-Scholes equation은 다음과 같다.

$$\frac{\partial P}{\partial t}+(\frac{1}{2}\sigma^2-\mu)S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}-rP(S,t)+rS\frac{\partial P}{\partial S}=0, \quad P(S,T)=PO(S). \qquad (33)$$

앞에서와 같이 다음의 변수 변환을 고려하자.

$$t=-t,\ \ln S=x \Rightarrow S=e^x,\ \frac{\partial x}{\partial S}=\frac{1}{S},\ P_S=\frac{P_x}{S},\ P_{SS}=\frac{P_{xx}-P_x}{S^2}.$$

그러면 식 (33)은 다음과 같이 변환 된다.

$$P_t-(r+\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)P_x=(\frac{1}{2}\sigma^2-\mu)P_{xx}-rP, \quad P(x,0)=PO(e^x). \qquad (34)$$

다시 말하면 (33)과 (34)는 $d\Pi$의 stochastic part만 소거하고 deterministic한 part는 조금 더 낫게 고려한 경우다. (보다 정확하게 의미를 사용 하려면 Ito's Lemma를 사용해야 한다.) Black-Scholes equation의 경우는 이와는 달리 양쪽 모두 비슷한 것을 소거한 경우이다. 그렇다면 어느 식이 더 나은 것인가? (34)의 경우는 equation 자체가 unstable함을 쉽게 알 수 있다. diffusion coefficient가 쉽게 음수가 됨을 알 수 있기 때문이다. 아마도 Black-Scholes의 경우와는 달리 stochastic한 part만을 소거하였기 때문에 생기는 현상인 것 같다. 그런데 이전의 경우는 모두 표준편차가 σ인 정규 분포를 이용한 결과를 얻은 것으로 미루어 (34)의 diffusion coefficient도 $\frac{1}{2}\sigma^2$라고 놓으면 다음을 얻는다.

$$P_t-(r+\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)P_x=\frac{1}{2}\sigma^2 P_{xx}-rP, \quad P(x,0)=PO(e^x). \qquad (35)$$

이식을 용하여 계산하면 Black-Scholes 보다는 오히려 (6)에 가까운 결과를 얻는다.

```
> restart:
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> myheaviside:=x->500*(max(x+0.001,0)-max(x-0.001,0)):
> phi:=(x,Mean,sigma)->exp(-(x-Mean)^2/(2*sigma^2))/sigma/sqrt(2*Pi); # Normal distribution
```

$$\phi := (x, Mean, \sigma) \to \frac{e^{\left(-1/2\,\frac{(x-Mean)^2}{\sigma^2}\right)}}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}$$

```
> PO:=S->max(1-S,0);  #pay off of European put, E=1
  #PO:=S->max(S-1,0);  #pay off of European call, E=1
  #PO:=S->max(S-0.9,0)-max(S-1.1,0);  #pay off bullish vertical spread
  #PO:=S->myheaviside(S-1);  #pay off function of ...
  #PO:=S->myheaviside(S-0.9)-myheaviside(S-1.1);
  #PO:=S->myheaviside(S-0.8)-2*myheaviside(S-1.0)+myheaviside(S-1.2);
  #PO:=S->5*max(S-0.8,0)-10*max(S-1.0,0)+5*max(S-1.2,0);  #pay off bullish vertical spread
```

$$PO := S \to \max(1 - S, 0)$$

```
> Price0:=(S,T,r,mu)->exp(-r*T)*PO((1+mu*T)*S); #option price with zero volarity using splitting
```

$$Price0 := (S, T, r, \mu) \to e^{(-r\,T)}\,\mathrm{PO}((1 + \mu\,T)\,S)$$

```
> Price1:=(S,T,r,mu,sigma)->exp(-r*T)*int(PO(exp(x+mu*T))*phi(x,ln(S),sigma*sqrt(T)),x=ln(S)-5*sigma*sqrt(T)..ln(S)+5*sigma*sqrt(T));  # option price using splitting without B-S.
```

$$Price1 := (S, T, r, \mu, \sigma) \to e^{(-r\,T)} \int_{\ln(S) - 5\,\sigma\sqrt{T}}^{\ln(S) + 5\,\sigma\sqrt{T}} \mathrm{PO}(e^{(x + \mu\,T)})\,\phi(x, \ln(S), \sigma\sqrt{T})\,dx$$

```
> Price2:=(S,T,r,mu,sigma)->exp(-r*T)*int(PO(exp(x+(r-sigma^2/2)*T))*phi(x,ln(S),sigma*sqrt(T)),x=ln(S)-5*sigma*sqrt(T)..ln(S)+5*sigma*sqrt(T)); # option price using splitting under B-S.
```

$$Price2 := (S, T, r, \mu, \sigma) \to e^{(-r\,T)} \int_{\ln(S) - 5\,\sigma\sqrt{T}}^{\ln(S) + 5\,\sigma\sqrt{T}} \mathrm{PO}(e^{(x + (r - 1/2\,\sigma^2)\,T)})\,\phi(x, \ln(S), \sigma\sqrt{T})\,dx$$

```
> Price3:=(S,T,r,mu,sigma)->exp(-r*T)*int(exp(((r-sigma^2/2)*(x-ln(S))-(r-sigma^2/2)^2*T/2)/sigma^2)*PO(exp(x))*phi(x,ln(S),sigma*sqrt(T)),x=ln(S)-10*sigma*sqrt(T)..ln(S)+10*sigma*sqrt(T)); # option price using non-splitting under B-S.
```

$$Price3 := (S, T, r, \mu, \sigma) \to$$

$$e^{(-r\,T)} \int_{\ln(S) - 10\,\sigma\sqrt{T}}^{\ln(S) + 10\,\sigma\sqrt{T}} e^{\left(\frac{(r - 1/2\,\sigma^2)\,(x - \ln(S)) - 1/2\,(r - 1/2\,\sigma^2)^2\,T}{\sigma^2}\right)} \mathrm{PO}(e^x)\,\phi(x, \ln(S), \sigma\sqrt{T})\,dx$$

```
> Price4:=(S,T,r,mu,sigma)->exp(-r*T)*int(PO(exp(x+(r+mu-sigma^2/2
)*T))*phi(x,ln(S),sqrt((sigma^2)*T)),x=ln(S)-5*sqrt((sigma^2)*T)
..ln(S)+5*sqrt((sigma^2)*T)); # option price using splitting
under modified B-S (35).
```

$$Price4 := (S, T, r, \mu, \sigma) \rightarrow e^{(-r\,T)} \int_{\ln(S) - 5\sqrt{\sigma^2\,T}}^{\ln(S) + 5\sqrt{\sigma^2\,T}} \mathrm{PO}(e^{(x + (r + \mu - 1/2\,\sigma^2)\,T)})\,\phi(x, \ln(S), \sqrt{\sigma^2\,T})\,dx$$

```
> deltahedging:=(S,T,r,mu,sigma)->diff(Price3(S,T,r,mu,sigma),S);
```

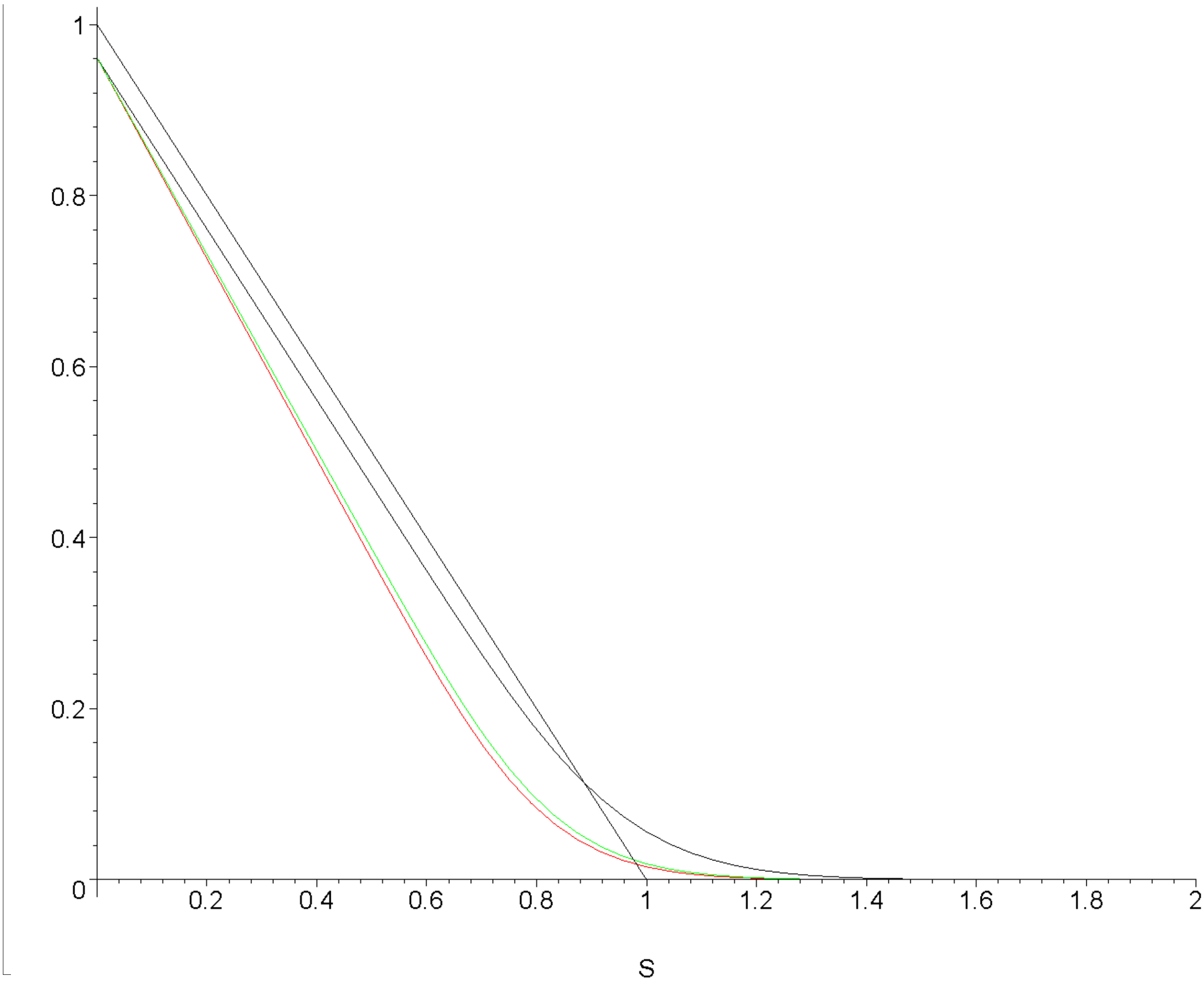
$$deltahedging := (S, T, r, \mu, \sigma) \rightarrow \mathrm{diff}(\mathrm{Price3}(S, T, r, \mu, \sigma), S)$$

```
>  Price1(0.84,0.4,0.1,0.2,0.1);
   Price2(0.84,0.4,0.1,0.2,0.1);
```

$$0.08661800199$$

$$0.1211327619$$

```
> F0 := plot(PO(S),S=0..2, color=black):                   #F1,T=0
or Pay Off function
> A1 := plot(Price1(S,0.4,0.1,0.2,0.1),S=0..2, color=green):
  A2 := plot(Price1(S,0.4,0.1,0.3,0.2),S=0..2, color=green):
  A3 := plot(Price1(S,0.4,0.1,0.4,0.3),S=0..2, color=green):
  A4 := plot(Price1(S,0.4,0.1,0.5,0.4),S=0..2, color=green):
> D1 := plot(Price4(S,0.4,0.1,0.2,0.1),S=0..2, color=red):
  D2 := plot(Price4(S,0.4,0.1,0.3,0.2),S=0..2, color=red):
  D3 := plot(Price4(S,0.4,0.1,0.4,0.3),S=0..2, color=red):
  D4 := plot(Price4(S,0.4,0.1,0.5,0.4),S=0..2, color=red):
> C1 := plot(Price3(S,0.4,0.1,0.2,0.1),S=0..2, color=black):
  C2 := plot(Price3(S,0.4,0.1,0.3,0.2),S=0..2, color=black):
  C3 := plot(Price3(S,0.4,0.1,0.4,0.3),S=0..2, color=black):
  C4 := plot(Price3(S,0.4,0.1,0.5,0.4),S=0..2, color=black):
> display(F0,A3,C3,D3);
```


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
S